## RECURRENCIAS LINEALES

1) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $a_n = 4\,a_{n-1} - 4\,a_{n-2}$ , $n \geq 2, a_0 = 6, a_1 = 8$

b) $a_n = 7\,a_{n-1} - 10\,a_{n-2}$ , $n \geq 2, a_0 = 2, a_1 = 1$

c) $a_n = 2\,a_{n-1} - a_{n-2}$ , $n \geq 2, a_0 = 4, a_1 = 1$

d) $a_{n+2} = -4\,a_{n+1} + 5\,a_n$ , $n \geq 0, a_0 = 2, a_1 = 8$

e) $a_n = 6\,a_{n-1} - 11\,a_{n-2} + 6\,a_{n-3}$ , $n \geq 3, a_0 = 2, a_1 = 5, a_2 = 15$

f) $a_n = 5\,a_{n-1} - 6\,a_{n-2}$ , $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = 0$

g) $a_n = -6\,a_{n-1} - 9\,a_{n-2}$ , $n \geq 2, a_0 = 1, a_1 = -6$

2) Sea $a_n$ el número de palabras de longitud n formadas con los dígitos {0, 1}, que no tienen dos ceros consecutivos. Encuentra una relación de recurrencia para calcular $a_n$ y resuélvela.

3) Halla una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

4) Sea M = {A, B, C} y sea $S_n$ el conjunto de sucesiones de longitud n, formadas con las letras de M, en las que todas las cadenas de A-es consecutivas son de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular $S_n$ y resuélvela.

5) Se tiene una cantidad ilimitada de cubos de lado 1, 2 y 4, y se quiere construir una torre de base 4 x 4 apilando cubos, estando formada cada capa por cubos del mismo tamaño. Sea $T_n$ el número de formas distintas de construir una torre de altura n.
Encuentra una relación de recurrencia para hallar $T_n$.

6) Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia no homogéneas, con sus condiciones iniciales:

a) $a_n = a_{n-1} + 2n - 1,\ a_1 = 1$

b) $a_n = a_{n-1} + 3n^2,\ a_0 = 7$

c) $a_n = 3a_{n-1} + 5.7^n,\ a_0 = 2$

d) $a_n = 3a_{n-1} + 5.3^n,\ a_0 = 2$

e) $a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3} + n^2,\ a_0 = 11,\ a_1 = 1,\ a_2 = -1$

f) $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2} - 5.4^n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 0$

g) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 3$

h) $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 5.2^n,\ a_0 = 2,\ a_1 = 4$

i) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 3$

7) Halla mediante una relación de recurrencia las siguientes sumas, en función de n.

a) $a_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k$

b) $a_n = \sum_{k=1}^{n} 2k$

c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$

8) Halla una fórmula de recurrencia para obtener el número de listas $a_n$ de longitud *n* que se pueden formar con los números 0, 1 y 2 de manera que no contengan un número impar de 1's o 2's consecutivos (cada secuencia de 1's o de 2's consecutivos está formada por un número par de términos). Resuelve la recurrencia anterior para obtener su término general.

9) Hallar una relación de recurrencia para el número de listas $a_n$ de longitud $n$ formadas con los elementos 0, 1 y 2 en las que el elemento 1 no aparece nunca en el lugar posterior a un 2.

10) Se pretende diseñar una bandera con $n$ franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Sea $a_n$ el nº de banderas que se pueden formar con $n$ franjas horizontales, con los cuatro colores dados y tales que dos franjas adyacentes no sean del mismo color ni tampoco sean del mismo color la primera y la última franja.

a) Halla una relación de recurrencia para $a_n$. (Indicación: Haz $n = 4$ y generaliza para $n$, con $a_1 = 0$.)

b) Resuelve la ecuación de recurrencia obtenida en el apartado c).

11) Sea g($n$) = $\binom{n}{k}$, $n \geq k$, y $k$ fijo. Sabiendo que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, obtén una relación de recurrencia para calcular g($n$).

12) Sea la matriz cuadrada de orden n, $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $n \in \mathrm{N}$.

Halla una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es $D_n = \det A_n$ y resuélvela.